Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de pós-graduação e pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

FORMAS NORMAIS E ESTABILIDADE DE SISTEMAS REVERSÍVEIS COM RESSONÂNCIA DE SEGUNDA ORDEM

por

Carla Priscila Alves Santos

Mestrado Acadêmico em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Dr. Fábio dos Santos

Agosto de 2014

Carla Priscila Alves Santos

FORMAS NORMAIS E ESTABILIDADE DE SISTEMAS REVERSÍVEIS COM RESSONÂNCIA DE SEGUNDA ORDEM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio dos Santos

São Cristóvão
2014

Santos, Carla Priscila Alves

S237f Formas Normais e estabilidade de sistemas reversíveis com ressonância de segunda ordem / Carla Priscila Alves Santos; orientador Fábio dos Santos. - São Cristóvão, 2015.

45 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Formas (matemática). 2. Sistema lineares. I. Santos, Fabio dos. orient. II. Título

CDU 511.57

Dedicatória

Aos meus pais e aos meus irmãos.

Agradecimentos

- Primeiramente, agradeço a Deus que a cada dia demonstra estar ao meu lado;
- Aos meus dedicados pais, Mirtes e Genaldo, que me proporcionaram um caminho de estudos;
- Aos meus irmãos: Vinícius, Beatriz e Suellen; sempre amigos;
- Aos professores incentivadores do DMA - UFS, em especial ao orientador Fábio e a professora Lúcia;
- Aos amigos da longa jornada do mestrado; em especial a Jeocástria, Jussineide e Michele por não me deixarem desistir;
- Aos professores Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias e Cláudio Aguinaldo Buzzi por comporem a Banca Examinadora.
- Enfim, agradeço a todos que deram alguma contribuição no processo de minha formação.

Resumo

O objetivo dessa dissertação é a caracterização da estabilidade de soluções de equilíbrio de Sistemas Reversíveis com ressonância de segunda ordem. Para tanto, fornecemos definições e propriedades básicas pertinentes aos Sistemas Reversíveis; obteremos a forma normal do sistema linearizado e, a partir do método de Poincaré-Dulac, escreveremos a forma normal de terceira ordem do sistema em estudo. Por fim, trataremos das condições necessárias e/ou suficientes a estabilidade de uma solução nula de um Sistema Reversível com ressonância de segunda ordem analisando dois casos: o caso em que a matriz do sistema é diagonalizável e o caso em que a matriz é não-diagonalizável.

Palavras Chaves: Sistemas Reversíveis, Ressonância, Estabilidade, Forma Normal.

Abstract

The goal of this dissertation is characterize the stability of equilibrium solutions of Reversible Systems of second-order resonance. To this end, we provide definitions and basic properties relevant to the Reversible systems; we obtain the normal form of the linearized system and from the Poincaré-Dulac method, we will write the Normal Form of third order of the system studies. For last, we treat the necessary and sufficient conditions for the stability of the trivial solution of a reversible system at 1:1 resonance analyzing two cases: the case in which the system matrix is Diagonalizable and the case where the matrix is non-diagonalizable.

Key words: Reversible Systems, Resonance, Stability, Normal Forms.

Introdução

Esta dissertação tem como objetivo principal a obtenção da forma normal e caracterização da estabilidade de soluções de equilíbrio de sistemas reversíveis com ressonância de segunda ordem. Usamos como principal referência o paper de P.S. Krasil'Nivok e V.N. Tkhai, intitulado *Reversible Systems. Stability at 1:1 Resonance.*

Para atingir o nosso objetivo dividimos a dissertação em três capítulos que estão organizados da seguinte maneira.

O primeiro contém definições e resultados preliminares necessários ao entendimento do nosso trabalho. Nesse contexto, é importante que o leitor possua conhecimento de conceitos básicos de equações diferenciais ordinárias e de estabilidade de soluções de equilíbrio desse sistema. Neste capítulo também será definido nosso objeto de estudo: sistemas reversíveis e serão apresentadas algumas definições e propriedades básicas pertinentes a esse sistema que nos permitirá apresentar características do retrato de fase que serão usadas no terceiro capítulo para obtenção dos resultados sobre estabilidade.

No segundo capítulo, após caracterizar nosso objeto de estudo: um sistema reversível que apresenta ressonância de segunda ordem, obteremos a forma normal do sistema linearizado e, em seguida, usando o método de Poincaré-Dulac, escreveremos a respectiva forma normal até termos de terceira ordem com o objetivo de analisar a estabilidade de um equilíbrio do sistema abordado.

No último capítulo, trataremos das condições necessárias e/ou suficientes a estabilidade de uma solução nula de um sistema reversível com ressônancia de segunda ordem. Este capítulo será dividido em dois casos: o caso em que a matriz do sistema é diagonalizável e o caso em que a matriz é não-diagonalizável.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estudaremos a estabilidade de soluções de equilíbrio de equações diferenciais ordinárias enfatizando o Teorema de Chetaev. Em seguida, definiremos o objeto de estudo: sistemas reversíveis e abordaremos algumas definições e propriedades relacionadas a esse tipo de sistema que nos permitem apresentar características sobre o retrato de fase. Nos próximos capítulos usaremos tais características para estudar a estabilidade em sistemas reversíveis.

1.1 Estabilidade de soluções de equilíbrio de equações diferenciais ordinárias

Considere a equação diferencial ordinária autônoma (EDO)

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

onde $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Uma aplicação diferenciável $x : I \to U$ definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = f(\mathbf{x}(t))$$

para todo $t \in I$ é dita solução de (1.1). Além disso, chamamos de trajetória, ou curva integral, o conjunto de pontos $\gamma(t) = (t, \mathbf{x}(t)), t \in I$. Utilizaremos a notação $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0),\ t \in I$ para representar uma solução da EDO (1.1) definida em I tal que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Definição 1.1.1. *O espaço de fase da equação diferencial autônoma (1.1) é o domínio U de definição da aplicação f.*

O conjunto $\gamma_{\mathbf{p}} = \{\mathbf{x}(t,\mathbf{p}),\ t \in I_{\mathbf{p}}\}$, isto é, a imagem da curva integral de f pelo ponto $\mathbf{p}$, chama-se órbita de f pelo ponto p.

O retrato de fase da equação (1.1) é o conjunto das órbitas no espaço de fase.

Definição 1.1.2. *Dizemos que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x_0},\ \mathbf{x}_0 \in U$ é uma solução de equilíbrio do sistema (1.1) se $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.*

Sabe-se da teoria básica de EDO que cada solução $x = \mathbf{x}(t)$ em U depende continuamente de t e das condições iniciais $(\mathbf{x}_0, t_0)$. Em particular, prova-se que pequenas mudanças ou pertubações em $\mathbf{x}_0$ produzem pequenas mudanças em $\mathbf{x}(t)$, para t numa vizinhança de t_0. Mostra-se também que duas soluções que começam próximas, permanecem próximas durante um intervalo de tempo suficientemente grande, mas finito. Uma pergunta que se faz é se duas soluções que se iniciam próximas permanecem próximas por todo tempo, ou será que existem soluções que se desviam, não importando o quão próximas elas se iniciaram. Questões como estas pertencem a um ramo da matemática conhecido como teoria da estabilidade.

Definição 1.1.3. *Uma solução de equilíbrio $\mathbf{x}_0$ da equação (1.1) é dita*

1. ***estável*** *se para todo $\epsilon > 0$ existir um número $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que para qualquer $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$, a solução $\mathbf{x}(t)$ que se inicia em $\mathbf{x}$ quando $t = t_0$ está definida para todo $t \geq t_0$ e $\mathbf{x}(t) \in B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$, para todo $t \geq t_0$;*

2. ***assintoticamente estável*** *se for estável e, além disso, existir um número positivo $\delta_1 < \delta$ tal que $\| \mathbf{x} \| < \delta_1$ implica $\lim\limits_{t\to\infty} \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 \| = 0$;*

3. ***instável*** *quando não é estável.*

Observação 1.1.4. *O estudo da estabilidade de um equilíbrio qualquer reduz-se ao estudo da estabilidade da solução nula. Com efeito, se $\overline{\mathbf{x}}(t)$ é uma solução de (1.1), fazendo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) + \overline{\mathbf{x}}(t)$, temos que $\mathbf{x}(t)$ é solução de (1.1) se, e somente se, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \overline{\mathbf{x}}(t)$ é uma solução de*

$$\dot{\mathbf{z}} = g(\mathbf{z}, t), \tag{1.2}$$

onde $g(\mathbf{z}, t) = f(\mathbf{z}(t) + \overline{\mathbf{x}}(t), t) - f(\overline{\mathbf{x}}(t), t)$. A solução $\overline{\mathbf{x}}(t)$ da equação (1.1) corresponde a solução de equilíbrio $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ do sistema (1.2). Com isso o estudo da estabilidade solução $\overline{\mathbf{x}}(t)$ da equação (1.1) se reduz ao estudo da estabilidade do equilíbrio $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ do sistema (1.2).

Devido ao grande valor prático e teórico, a teoria da estabilidade é hoje uma das áreas mais importantes de toda a Matemática. Freqüentemente, em problemas das engenharias, da física, ou da própria Matemática, precisa-se saber sobre a estabilidade de uma solução de EDO. Nessa dissertação, estudaremos a estabilidade de soluções de equilíbrios de certos sistemas denominados sistemas reversíveis, aos quais vamos supor que possuem ressonância de segunda ordem.

1.2 Estabilidade de sistemas lineares com coeficientes constantes

Consideremos o sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{1.3}$$

em que A é uma matriz $n \times n$ cujas entradas a_{ij} são constantes reais.

A matriz A pode ser vista como um operador linear no espaço $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$, o qual pode ser estendido a um operador linear $A_{\mathbb{C}}$ no espaço complexo $\mathbb{C}^n$ definido por $A_{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + iA\mathbf{y}$.

Teorema 1.2.1. *As soluções da equação $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ onde A é uma matriz $n \times n$ com entradas constantes são combinações lineares de funções do tipo $t^m e^{\alpha t} \cos \beta t$ e $t^m e^{\alpha t} \sin \beta t$. Mais especificamente, uma solução geral do sistema (1.3) é da forma*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{m_j - 1} (\mathbf{A}_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t) + \mathbf{B}_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t))$$

onde $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ são autovalores de A, m_j é a dimensão do bloco de Jordan associado ao autovetor λ_j e $\mathbf{A}_{lj}$ e $\mathbf{B}_{lj}$ são vetores fixos do $\mathbb{R}^n$ para $j = 1, ..., k$ e $l = 1, 2, ..., m_j$.

Pelo teorema descrito acima, temos:

Teorema 1.2.2. *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os autovalores da matriz A e suponha que J_λ é o bloco de Jordan (em $\mathbb{C}$) associado a λ. Tem-se para a solução nula do sistema (1.3) as seguintes afirmações:*

1. *Se A é uma matriz não-singular, ou seja,* $\det A \neq 0$*; A é dita:*

   a) assintoticamente estável se, e somente se, $Re(\lambda_k) < 0$ para todo $k = 1, 2, ..., n$;

b) estável, mas não assintoticamente estável, se, e somente se, A tem ao menos um par de autovalores imaginários puros e sempre que cada bloco de Jordan J_λ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;

c) instável nos demais casos.

2. *Se a matriz A é uma matriz singular, ou seja, $\det A = 0$; A é dita:*

a) estável se os autovalores não nulos tem parte real negativa e o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal;

b) estável, mas não assintoticamente estável, no caso em que A tem ao menos um par de autovalores imaginários puros, sempre que cada bloco de Jordan J_λ (em $\mathbb{C}$) associado a cada autovalor imaginário puro λ seja diagonal, o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;

c) instável nos demais casos.

1.3 O Teorema de Chetaev

No próximo teorema usaremos a seguinte definição:

Definição 1.3.1. *O conjunto de valores das variáveis $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sob a condição $\| \mathbf{x} \| < \eta$ (isto é, numa pequena vizinhança da origem) satisfazendo a desigualdade $V = V(\mathbf{x}) > 0$, será denominada a região $V > 0$, e a superfície $V = 0$ será chamada de fronteira desta região.*

O teorema abaixo, segundo Chetaev, fornece um critério para a instabilidade.

Teorema 1.3.2. *Suponha que exista uma função real V de classe C^1 limitada na região $V > 0$, para valores de $\mathbf{x}$ numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n$ tal que $V(\mathbf{0}) = 0$, com $\dot{V}(\mathbf{x})$ definida positiva na região $V > 0$, então a solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema (1.1) é instável.*

Dizemos que V é *função de Chetaev* quando V satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3.2.

1.4 Sistemas reversíveis: definição e propriedades básicas

Definição 1.4.1. *Uma involução sobre o* $\mathbb{R}^n$ *é um difeomorfismo* $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo a igualdade* $M \circ M = I$.

Definição 1.4.2. Considere um sistema autônomo de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}} \;=\; f(\mathbf{x}) \tag{1.4}$$

onde $f : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1. Se existir uma involução

$$M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

tal que

$$D_{\mathbf{x}}M \cdot f(\mathbf{x}) = -f(M(\mathbf{x})) \tag{1.5}$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dizemos que o campo de vetores f é **reversível com relação a** M, ou ainda, M**-reversível** e M é dita uma simetria reversa do sistema (1.4).

Em nossos estudos, nos restringiremos as involuções M que são aplicações lineares. Assim, a equação (1.5) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$M \cdot f(\mathbf{x}) = -f(M(\mathbf{x})) \tag{1.6}$$

Definição 1.4.3. *: Denotamos por* S *o conjunto de pontos fixados pelo operador* M*, ou seja,*

$$S = \{\mathbf{x}_0 \in U; M\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0\}$$

S *é denominado* **conjunto dos pontos fixos de** M.

Exemplo 1.4.4. *Seja*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

onde $f(\mathbf{x}) = (ax_2, bx_1)$*, onde* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Considere

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$M(f(x_1, x_2)) = M(ax_2, bx_1) = (ax_2, -bx_1).$$

Por outro lado,

$$-f(M(x_1,x_2)) = -f(x_1,-x_2) = -(-ax_2, bx_1) = (ax_2, -bx_1),$$

e portanto f é reversível com relação a M .

Concluímos ainda que o conjunto S de pontos fixados pela involução M é o eixo x, visto que

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; M(x_1,x_2) = (x_1,x_2)\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1,-x_2) = (x_1,x_2)\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in \mathbb{R} \ e \ x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.5. *Seja*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \ \ onde \ f = (g,h)$$

O sistema acima é reversível relativo a involução $M(x_1,x_2) = (x_1,-x_2)$ se, e somente se, g é uma função ímpar e h uma função par ambas em relação a variável x_2. De fato, considerando a reversibilidade do sistema com relação a M, é válida a seguinte igualdade: $M(f(x_1,x_2)) = -f(M(x_1,x_2))$.

Por um lado temos:

$$\begin{aligned} M(f(x_1,x_2)) &= M(g(x_1,x_2), h(x_1,x_2)) \\ &= (g(x_1,x_2), -h(x_1,x_2)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -f(M(x_1,x_2)) &= -f(x_1,-x_2) \\ &= -(g(x_1,-x_2), h(x_1,-x_2)) \\ &= (-g(x_1,-x_2), -h(x_1,-x_2)), \end{aligned}$$

assim, visto que $M(f(x_1,x_2)) = -f(M(x_1,x_2))$ concluímos:

$$g(x_1,-x_2) = -g(x_1,x_2)$$

$$h(x_1,x_2) = h(x_1,-x_2),$$

ou seja, g é ímpar e h é par com relação a variável x_2.

Exemplo 1.4.6. *Considere um campo de vetores Hamiltoniano cuja função Hamiltoniana é tal que*

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = H(\mathbf{q},-\mathbf{p}); \quad (\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

As equações Hamiltonianas são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned}$$

Considere a involução $M : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por $M : (\mathbf{q},\mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{q},-\mathbf{p})$. Observe que o campo de vetores hamiltonianos é reversível com relação a involução M. De fato,

$$DM \cdot f(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} \right).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -f(M(\mathbf{q},\mathbf{p})) &= -f(\mathbf{q},-\mathbf{p}) \\ &= -\left(\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial(-\mathbf{p})}, -\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} \right). \end{aligned}$$

Agora, serão apresentadas algumas propriedades relacionadas a sistemas reversíveis que nos permitirá caracterizar o retrato de fase do referido sistema. Nos próximos capítulos usaremos tais características para estudar a estabilidade em sistemas reversíveis.

Seja

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{1.7}$$

um sistema reversível com relação a involução linear M. Com relação ao sistema (1.7), é válido:

Proposição 1.4.7. *Se $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$ é uma solução de (1.7), então $M(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0))$ também é . Portanto, o retrato de fase de f é simétrico em relação ao conjunto S de pontos fixados pela involução M.*

Demonstração: De fato, suponha que $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$ é uma solução, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0))$$

Devemos mostrar que

$$\frac{d}{dt}M(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0)) = f(M\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0)).$$

Utilizando a regra da cadeia e a reversibilidade do sistema, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}M(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0)) &= DM(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0))\cdot -\frac{d}{d(-t)}\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0)\\ &= M(-f(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0)))\\ &= f(M(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0)))\end{aligned}$$

Assim, provamos que $M(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0))$ também é solução do sistema (1.7) e, dessa maneira, o retrato de fase de f será simétrico em relação ao conjunto de pontos fixos S. ∎

Proposição 1.4.8. *Se uma órbita de f interceptar o conjunto S de pontos fixados pela involução linear M em dois pontos distintos, então necessariamente ela é uma órbita fechada.*

Demonstração: Suponha que uma órbita $\gamma_{\mathbf{x}_0}$ de f intercepta o conjunto S em $\mathbf{x}(t_1,\mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{x}(t_2,\mathbf{x}_0)$, com $t_1 < t_2$. Ou seja, $M(\mathbf{x}(t_1,\mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}(t_1,\mathbf{x}_0)$ e $M(\mathbf{x}(t_2,\mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}(t_2,\mathbf{x}_0)$. Como f é um campo reversível, pela Proposição 1.4.7, sendo $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$ uma solução do sistema (1.7), $M(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0))$ também é solução desse sistema. Assim, defina

$$\mathbf{y}(t,\mathbf{x}_0) = \begin{cases} \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0) \quad ; & t\in[t_1,t_2]\\ \overline{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}_0) = M(\mathbf{x}(2t_2-t,\mathbf{x}_0)); & t\in[t_2,2t_2-t_1]\end{cases}$$

Primeiramente, mostraremos que $\mathbf{y}(t,\mathbf{x}_0)$ está bem definida.

Temos, por hipótese, que $\mathbf{y}(t,\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$ para $t\in[t_1,t_2]$ é uma solução do sistema. Assim, como provado na Proposição 1.4.7, $M(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0))$ também é uma solução do sistema (1.7) percorrido no tempo $-t$, ou seja, para $t\in[t_2,t_1]$. Note que $\mathbf{y}(t,\mathbf{x}_0) = M(\mathbf{x}(2t_2-t,\mathbf{x}_0))$ para $t\in[t_2,2t_2-t_1]$ é solução de (1.7) pois $M(\mathbf{x}(2t_2-t,\mathbf{x}_0))$ para $t\in[t_2,2t_2-t_1]$ é igual a $M(\mathbf{x}(-t,\mathbf{x}_0))$ com $t\in[t_2,t_1]$.

Além disso, $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$ é uma solução que em $t=t_2$ vale $\mathbf{x}(t_2,\mathbf{x}_0)$. Do mesmo modo que a solução $\overline{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}_0)$ em $t=t_2$ vale $M(\mathbf{x}(t_2,\mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}(t_2,\mathbf{x}_0)$, pois,

$\mathbf{x}(t_2, \mathbf{x}_0) \in S$. Pelo Teorema da Existência e Unicidade, $\mathbf{x}$ e $\overline{\mathbf{x}}$ fazem parte da mesma solução garantindo assim que $\mathbf{y}(t, \mathbf{x}_0)$ está bem definida.

Observe que $\mathbf{y}(t, \mathbf{x}_0)$ é uma solução periódica, visto que $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{y}(2t_2 - t_1) = M(\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}_o)) = \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}_0)$. Logo, $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}(2t_2 - t_1)$. O que mostra que $\mathbf{y}$ é uma solução periódica de período $2|t_2 - t_1|$ e assim $\gamma_{\mathbf{x}_0}$ é uma órbita fechada.

∎

A seguir, demonstraremos outra propriedade importante do comportamento do sistema (1.7).

Proposição 1.4.9. *Considere o sistema reversível (1.7). Se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ é uma solução de equilíbrio desse sistema, então $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ não pode ser assintoticamente estável.*

Demonstração: Suponha que a solução nula $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ seja assintoticamente estável. Então existe uma bola $B_\delta(0)$ de centro na origem e raio $\delta > 0$ tal que para cada $\mathbf{z} \in B_\delta(0)$ a solução $\mathbf{z}(t)$ com $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}$ de (1.7) satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{z}(t) = 0.$$

Sendo M linear, e portanto contínua, é possível escolher δ', $0 < \delta' < \delta$ tal que $\| M\mathbf{x} \| < \delta$ para todo $\mathbf{x} \in B_{\delta'}(0)$. Para um $\mathbf{x} \in B_{\delta'}(0)$, seja $\mathbf{x}(t)$ a solução de (1.7) que no tempo zero passa por $\mathbf{x}$, assim $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$. Note que definindo $\mathbf{y}(t) = M(\mathbf{x}(-t))$ temos

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = -M \circ f(\mathbf{x}(-t)) = f \circ M(\mathbf{x}(-t)) = f(\mathbf{y}(t))$$

e, portanto, $\mathbf{y}(t)$ é uma solução de (1.7) com condição inicial $\mathbf{y}(0) = M\mathbf{x}$ em $B_\delta(0)$. Isso implica

$$\lim_{t\to-\infty} \mathbf{y}(t) = M(\lim_{t\to-\infty} \mathbf{x}(-t)) = 0,$$

contradizendo a suposição da solução nula ser assintoticamente estável. ∎

Capítulo 2

Formas normais de sistemas reversíveis

Neste capítulo obteremos a forma normal de um sistema reversível que apresenta ressonância 1:1 até termos de terceira ordem com o objetivo de analisar a estabilidade de um equilíbrio do sistema abordado. Sendo assim, considere o sistema (1.7), reversível com relação a involução linear M, e assuma que a origem do espaço de fase é uma solução de equilíbrio e que a função f é analítica numa vizinhança da origem.

2.1 Forma normal do sistema linearizado

Nesta seção mostraremos que por meio de uma mudança linear de coordenadas podemos simplificar o sistema linearizado numa vizinhança da origem associado ao sistema (1.7). Iniciaremos "simplificando"a involução linear M.

Proposição 2.1.1. *Existe uma mudança linear de coordenadas do $\mathbb{R}^n$ tal que nas novas coordenados M é dada por:*

$$M = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix}_{n\times n}, \tag{2.1}$$

com $l+m=n$; I_l a matriz identidade $l\times l$ e I_m a matriz identidade $m\times m$.

Demonstração: Como $M^2 = I$ temos que $M^2 - I = 0$. Assim, o polinômio $p(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ é um polinômio anulador do operador linear

M. Sabendo que o conjunto de polinômios anuladores de M possui como único gerador mônico o polinômio mínimo $m(x)$ de M, temos que:

$$m(x)|p(x) \Rightarrow m(x) = x + 1 \text{ ou } \ m(x) = x - 1 \text{ ou } m(x) = p(x).$$

Podemos concluir que:

- Se $m(x) = x + 1$, então $m(M) = M + I$. Ou seja, $M = -I$.
- Se $m(x) = x - 1$, então $m(M) = M - I$. Ou seja, $M = I$.
- Se $m(x) = (x + 1)(x - 1)$, então M é diagonalizável e escrevemos

  $$M = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix}_{n \times n},$$

  onde $l + m = n$.

∎

Assumindo que foi feita a mudança de coordenadas tal que M assume a forma dada em (2.1), podemos provar que o sistema (1.7) pode ser escrito em uma forma particular descrita na proposição seguinte.

Proposição 2.1.2. *Considere o sistema (1.7) onde M é uma involução linear satisfazendo assim (2.1). Existe uma mudança linear de coordenadas na qual o sistema (1.7) pode ser reescrito como:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_* = U(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*) \\ \dot{\mathbf{v}}_* = V(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*), \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\mathbf{u}_* \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^m$, $l + m = n$ e satisfazendo as seguintes igualdades: $U(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*) = -U(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*)$ e $V(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*) = V(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*)$. Além disso, a linearização de (2.2) em torno da origem é

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_* &= A_*\mathbf{v}_* \\ \dot{\mathbf{v}}_* &= B_*\mathbf{u}_*, \end{aligned} \tag{2.3}$$

sendo A_* e B_* são matrizes constantes.

Demonstração: De fato, escrevendo $\mathbf{x} = (\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*)$, onde $\mathbf{u}_* \in \mathbb{R}^l$ e $\mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^m$, e considerando

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_* &= U(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*) \\ \dot{\mathbf{v}}_* &= V(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*), \end{aligned}$$

obtemos a igualdade $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*) = (U(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*), V(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*))$.

Como o sistema é reversível com relação a involução linear M, podemos afirmar por (1.6) que $Mf(\mathbf{x}) = -fM(\mathbf{x})$. Assim, supondo que foi feita a mudança linear de coordenadas tal que M é escrito como (2.1), temos que:

$$\begin{aligned} Mf(\mathbf{x}) &= M(\dot{\mathbf{u}}_*, \dot{\mathbf{v}}_*) \\ &= M(U(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*), V(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*)) \\ &= (U(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*), -V(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -fM(\mathbf{x}) &= -f(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*) \\ &= -(U(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*), V(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*)) \\ &= (-U(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*), -V(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*)), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*) &= -U(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*) \\ V(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*) &= V(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sendo f analítica numa vizinhança da origem, temos que U e V são funções analíticas em $\mathbf{u}_*$ e $\mathbf{v}_*$. A aproximação linear do sistema (1.7) em uma vizinhança da origem é dada por:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_* \\ \dot{\mathbf{v}}_* \end{pmatrix} = DF(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \cdot (\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*)^T,$$

onde $F(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*) = (U(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*), V(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*))$.

Assim,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_* \\ \dot{\mathbf{v}}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{\mathbf{u}_*}U(\mathbf{0}, \mathbf{0}) & D_{\mathbf{v}_*}U(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ D_{\mathbf{u}_*}V(\mathbf{0}, \mathbf{0}) & D_{\mathbf{v}_*}V(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_* \\ \mathbf{v}_* \end{pmatrix},$$

e, observe que pelas igualdades em (2.4), temos: $D_{\mathbf{u}_*}U(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*) = -D_{\mathbf{u}_*}U(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*)$ e $-D_{\mathbf{v}_*}V(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*) = D_{\mathbf{v}_*}V(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*)$. Assim, para $\mathbf{u}_* = \mathbf{v}_* = \mathbf{0}$, teremos: $D_{\mathbf{u}_*}U(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = D_{\mathbf{v}_*}V(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

Logo, a aproximação linear de (1.7) em torno da origem é:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_* \\ \dot{\mathbf{v}}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_{\mathbf{v}_*}U(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ D_{\mathbf{u}_*}V(\mathbf{0}, \mathbf{0}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_* \\ \mathbf{v}_* \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_* &= A_* \mathbf{v}_* \\ \dot{\mathbf{v}}_* &= B_* \mathbf{u}_*, \end{aligned}$$

onde $A_* = D_{\mathbf{v}_*}U(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $B_* = D_{\mathbf{u}_*}V(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ são matrizes constantes. ∎

Proposição 2.1.3. *Seja*

$$D = \begin{pmatrix} 0_{l \times l} & A_{*l \times m} \\ B_{*m \times l} & 0_{m \times m} \end{pmatrix}_{n \times n},$$

então as seguintes afirmações são válidas:

a) Para $l > m$ temos que 0 é um autovalor da matriz D de multiplicidade $\kappa \geq l - m$;

b) Para $\kappa = l - m$ temos que os autovalores não nulos de D ocorrem aos pares;

c) Em uma base adequada, podemos reescrever o sistema (2.3) como

$$\dot{\xi} = 0, \;\; \dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{v}, \;\; \dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{u}, \tag{2.5}$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^{l-m}$ e $\mathbf{u}, \;\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. Além disso, as raízes não nulas λ da equação característica desse novo sistema são tais que:

$$\det(C - \lambda^2 I) = 0,$$

com $C = A \cdot A$.

Demonstração:

a) Se $l > m$, então a matriz D do sistema (2.3) é singular, ou seja, $\det D = 0$. De fato, isso se deve a existência de uma submatriz de zeros cuja soma do número de linhas e colunas excede n. Sendo assim, 0 é um autovalor da matriz D e denotaremos por κ a multiplicidade desse autovalor.

Agora, provaremos que κ satisfaz a seguinte desigualdade: $\kappa \geq l - m$. De fato,

$$\begin{aligned}
\kappa &= \dim \ker D \\
&= n - \dim \mathrm{Im} D \\
&= n - (\dim \mathrm{Im} A_* + \dim \mathrm{Im} B_*) \\
&\geq n - 2m = (l + m) - 2m = l - m.
\end{aligned}$$

b) Observe que se $\kappa = l - m$, então dim Im A_* = dim Im $B_* = m$. Considerando que a multiplicidade do autovalor 0 é $\kappa = l - m$, vamos mostrar que o restante dos autovalores de D ocorrem aos pares, pois D e $-D$ são semelhantes.

De fato, pela reversibilidade do sistema temos:

$$MD = -DM \Rightarrow D = -M^{-1}DM = M^{-1}(-D)M,$$

ou seja, D e $-D$ são matrizes semelhantes. Considerando λ um autovalor de D, então $\det(D - \lambda I) = 0$ e como:

$$\begin{aligned}
\det(D - \lambda I) &= \det[M^{-1}(-D)M - \lambda M^{-1}M] \\
&= \det[M^{-1}(-D - \lambda I)M] \\
&= \det(-D - \lambda I) \\
&= (-1)^n \cdot \det(D + \lambda I),
\end{aligned}$$

segue que $\det(D + \lambda I) = 0$. Assim, $-\lambda$ também é autovalor de D. Desse modo, em uma base adequada, podemos escrever D da seguinte maneira:

$$D = \mathrm{diag}(0, A, -A) \text{ com } \det A \neq 0.$$

c) O sistema (2.3) é reescrito da seguinte forma:

$$\dot{\xi} = 0, \;\; \dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{v}, \;\; \dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{u} \text{ onde } \xi \in \mathbb{R}^{l-m}, \;\; \mathbf{u}, \;\; \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Isso deve-se a semelhança entre as matrizes

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

assim, matricialmente, temos:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

Logo, a equação característica do sistema acima é dada por:

$$\begin{aligned}
\det(D - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda I & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & A \\ 0 & A & -\lambda I \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda)^{l-m} \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda I & A \\ A & -\lambda I \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda)^{l-m} \cdot \det(-\lambda I) \cdot \det \left(\lambda I - A \left(-\frac{1}{\lambda} I \right) A \right) \\
&= (-\lambda)^{l-m} \cdot (-\lambda)^m \cdot \det \left(-\frac{1}{\lambda} (-\lambda^2 I + A^2) \right) \\
&= (-\lambda)^{l-m} \cdot \det(A^2 - \lambda^2 I),
\end{aligned}$$

ou seja, as raízes não nulas λ da equação característica do sistema (2.5) são tais que:

$$\det(C - \lambda^2 I) = 0, \tag{2.6}$$

com $C = A \cdot A$.

∎

As raízes λ não nulas do sistema linear (2.5) descrito por:

$$\dot{\xi} = 0, \; \dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{v}, \; \dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{u} \text{ onde } \xi \in \mathbb{R}^{l-m}, \; \mathbf{u}, \; \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$$

são obtidas na equação (2.6). O estudo desses autovalores λ fornecem informações sobre a estabilidade da solução nula. Considere então a existência de um autovalor λ_j cuja parte real seja diferente de zero. Nessa situação temos duas opções: ou $\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$ ou $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$.

- Pelo Teorema 1.2.2, a existência de um autovalor com parte real positiva, $\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$, já leva a instabilidade do sistema.
- Caso $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, temos que $\mathrm{Re}(-\lambda_j) > 0$, já que os autovalores não nulos acontecem aos pares. Assim, pelo Teorema 1.2.2, o sistema (2.5) é instável.

Daí concluímos que a existência de um autovalor λ_j tal que $\mathrm{Re}(\lambda_j) \neq 0$ leva a instabilidade da solução nula do sistema (2.5). Com isso, estudaremos o caso em que todos os autovalores λ_s são imaginários puro (${\lambda_s}^2 < 0$) e assumiremos que pelo menos um par consiste de números iguais (${\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^2$).

2.1.1 A forma normal no caso em que o sistema possui ressonância de segunda ordem

Definição 2.1.4. *Dizemos que o sistema (1.7) apresenta ressonância de segunda ordem (ou ressonância 1:1) quando possui dois pares de autovalores imaginários puros* $\pm\lambda_1$ *e* $\pm\lambda_2$ *tais que* ${\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^2$*.*

Assim, vamos considerar o sistema linearizado na seguinte forma:

$$\dot{\xi} = 0, \ \dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{v}, \ \dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{u} \text{ com } \xi \in \mathbb{R}^{l-m} \ e \ \mathbf{u}, \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m,$$

cujos autovalores λ_s não nulos são imaginários puros e são obtidos pelas raízes da equação $\det(C - {\lambda_s}^2 I) = 0$; com $C = A \cdot A$. Além disso, considere a existência de pelo menos um par de números iguais (${\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^2$), ou seja, **um sistema reversível que apresenta ressonância de segunda ordem**.

Nesta seção serão provados lemas e teoremas que nos permitirão reescrever o sistema (2.5) em uma forma particularmente simples, a partir da transformação linear exibida a seguir.

Considere a transformação linear:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_1 \mathbf{u}_j) + i\mu \sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j \\ z_s &= \sum_{j=1}^{m} p_{sj}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_s \mathbf{u}_j) \quad (s = 2, 3, 4, ..., m) \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde a matriz $P = (p_{ij})$ tem elementos imaginários puros que satisfazem o sistema de equações lineares

$$(C - {\lambda_s}^2 I)^T {\mathbf{p}_s}^T = 2i\mu\lambda_1\delta_{1s}{\mathbf{p}_2}^T \tag{2.8}$$

com $\mathbf{p}_s = (p_{s1}, p_{s2}, p_{s3}, ..., p_{sm})$ e δ_{1s} é o delta de Kronecker. Essa transformação será utilizada posteriormente para reescrever o sistema (2.5).

Observação 2.1.5. *No estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio do sistema reversível serão considerados dois casos: o primeiro caso é quando a matriz C é não-diagonalizável, onde faremos $\mu = 1$ na equação (2.7) e o segundo caso ocorre quando a matriz C é diagonalizável, onde faremos $\mu = 0$.*

Lema 2.1.6. *Considere a transformação linear (2.7), podemos escrever as seguintes igualdades:*

- *Para $s = 1$*

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}p_{1j} = {\lambda_1}^2 p_{1i} + 2i\mu\lambda_1 p_{2i}, i = 1, 2, 3, .., m$$

- *Para $s \neq 1$*

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}p_{sj} = {\lambda_s}^2 p_{si}, \quad i = 1, 2, 3, .., m$$

Demonstração: De fato, considerando $s = 1$, pela equação (2.8), temos:

$$(C - {\lambda_1}^2 I)^T {p_1}^T = 2i\mu\lambda_1 {p_2}^T \Rightarrow C^T {p_1}^T = {\lambda_1}^2 {p_1}^T + 2i\mu\lambda_1 {p_2}^T$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}p_{1j} = {\lambda_1}^2 p_{1i} + 2i\mu\lambda_1 p_{2i}, \; i = 1, 2, 3, .., m \tag{2.9}$$

Caso $s \neq 1$ ($\delta_{1s} = 0$), a equação (2.8) pode ser escrita como:

$$(C - {\lambda_s}^2 I)^T {\mathbf{p}_s}^T = 0$$

Assim, a equação tem soluções não-triviais e podemos escrever $C^T {\mathbf{p}_s}^T = {\lambda_s}^2 {\mathbf{p}_s}^T$, ou seja, p_s são autovetores de C^T associados aos autovalores distintos ${\lambda_s}^2$ com $s = 2, 3, 4, ..., m$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}p_{sj} = {\lambda_s}^2 p_{si}, \tag{2.10}$$

onde $i = 1, 2, 3, .., m$. ∎

Proposição 2.1.7. *Existe uma mudança de coordenadas no qual o sistema (2.5) pode ser reescrito com as seguintes condições.*

1. *Se C é não-diagonalizável, onde consideraremos $\mu = 1$, o novo sistema é*

$$\dot{\xi} = 0, \;\; \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + i z_2, \quad \dot{\overline{z}}_1 = -\lambda_1 \overline{z}_1 - i\overline{z}_2$$

$$\dot{z}_s = \lambda_s z_s, \quad \dot{\overline{z}}_s = -\lambda_s \overline{z}_s \quad (s = 2, 3, ..., m)$$

2. *Se C é diagonalizável, onde consideraremos $\mu = 0$, $p_{1,m-1} = p_{2m} = 1, p_{1m} = p_{2,m-1} = 0$, o novo sistema é*

$$\dot{\xi} = 0 \;, \dot{z}_s = \lambda_s z_s, \;\; \dot{\overline{z}}_s = -\lambda_s \overline{z}_s \quad (s = 1, 2, ..., m)$$

Demonstração: Considere a mudança de coordenadas dada pela transformação linear (2.7). Vamos separar a prova em dois casos:

Para o caso $s \neq 1$, temos:

$$z_s = \sum_{j=1}^{m} p_{sj}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_s \mathbf{u}_j),$$

e assim

$$\dot{z}_s = \sum_{j=1}^{m} p_{sj}(\ddot{\mathbf{u}}_j + \lambda_s \dot{\mathbf{u}}_j).$$

Veja que considerando o sistema (2.5) onde $\dim Im(C) = \dim Im(A)$, podemos concluir que $\ddot{\mathbf{u}} = A\dot{\mathbf{v}} = A^2\mathbf{u}$, ou seja, $\ddot{\mathbf{u}} = C\mathbf{u}$. Matricialmente temos:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{u}}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1m} & c_{2m} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix},$$

e assim,

$$\ddot{\mathbf{u}}_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ji} \mathbf{u}_i \tag{2.11}$$

Considerando a igualdade (2.11), temos:

$$\begin{aligned} \dot{z}_s &= \sum_{j=1}^{m} p_{sj}(\ddot{\mathbf{u}}_j + \lambda_s \dot{\mathbf{u}}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} p_{sj}(\sum_{i=1}^{m} c_{ji}\mathbf{u}_i + \lambda_s p_{sj} \dot{\mathbf{u}}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{m} c_{ji} p_{sj} \mathbf{u}_i) + \sum_{j=1}^{m}(\lambda_s p_{sj} \dot{\mathbf{u}}_j). \end{aligned}$$

Pela equação (2.10),

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}p_{sj} = {\lambda_s}^2 p_{si}, \quad i = 1, 2, 3, .., m$$

e assim

$$\begin{aligned}
\dot{z}_s &= \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{m} c_{ji}p_{sj}\mathbf{u}_i) + \sum_{j=1}^{m}(\lambda_s p_{sj}\dot{\mathbf{u}}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} {\lambda_s}^2 p_{si}\mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_s p_{sj}\dot{\mathbf{u}}_j \\
&= \lambda_s \sum_{i=1}^{m} \lambda_s p_{si}\mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} p_{sj}\dot{\mathbf{u}}_j \\
&= \lambda_s \sum_{k=1}^{m} \lambda_s p_{sk}\mathbf{u}_k + p_{sk}\dot{\mathbf{u}}_k \\
&= \lambda_s \sum_{k=1}^{m} p_{sk}(\dot{\mathbf{u}}_k + \lambda_s \mathbf{u}_k) \\
&= \lambda_s z_s.
\end{aligned}$$

Como $\dot{z}_s = \lambda_s z_s$, teremos: $\overline{\dot{z}_s} = \overline{\lambda_s z_s} = -\lambda_s \overline{z}_s$. Lembrando que λ_s é imaginário puro.

Para o caso $s = 1$, sabemos que

$$z_1 = \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_1 \mathbf{u}_j) + i\mu \sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(\ddot{\mathbf{u}}_j + \lambda_1 \dot{\mathbf{u}}_j) + i\mu \sum_{j=1}^{m} p_{2j}\dot{\mathbf{u}}_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(\sum_{i=1}^{m} c_{ji}\mathbf{u}_i + \lambda_1 \dot{\mathbf{u}}_j) + i\mu \sum_{j=1}^{m} p_{2j}\dot{\mathbf{u}}_j \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} p_{1j}c_{ji}\mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_1 p_{1j}\dot{\mathbf{u}}_j + i\mu \sum_{j=1}^{m} p_{2j}\dot{\mathbf{u}}_j \\
&= \sum_{i=1}^{m}({\lambda_1}^2 p_{1i} + 2i\mu\lambda_1 p_{2i})\mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_1 p_{1j}\dot{\mathbf{u}}_j + i\mu \sum_{j=1}^{m} p_{2j}\dot{\mathbf{u}}_j \\
&= \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^{m} p_{1k}(\lambda_1 \mathbf{u}_k + \dot{\mathbf{u}}_k) + i\mu \sum_{k=1}^{m} p_{2k}\mathbf{u}_k \right) + i\mu \sum_{k=1}^{m} p_{2k}(\lambda_2 \mathbf{u}_k + \dot{\mathbf{u}}_k) \\
&= \lambda_1 z_1 + i\mu z_2,
\end{aligned}$$

já que $\ddot{\mathbf{u}}_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ji}\mathbf{u}_i$ e pela equação (2.9)

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}p_{1j} = {\lambda_1}^2 p_{1i} + 2i\mu\lambda_1 p_{2i}, i = 1, 2, 3, .., m,$$

e, além disso, pela ressonância de segunda ordem temos $\lambda_1 = \lambda_2$.

Concluímos então que, para $\mu = 1$, temos $\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + iz_2$ e assim $\dot{\overline{z}}_1 = -\lambda_1\overline{z}_1 - i\overline{z}_2$. Para $\mu = 0$, temos $\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1$ e assim $\dot{\overline{z}}_1 = -\lambda_1\overline{z}_1$.

∎

Provaremos agora que a matriz P é não-singular. De fato, vimos que $\mathbf{p}_s$ são autovetores de C^T associados aos autovalores distintos ${\lambda_s}^2$ quando $s \neq 1$ o que garante que os vetores-linha $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, ..., \mathbf{p}_m$ da matriz P são linearmente independentes. Basta apenas mostrar que o vetor $\mathbf{p}_1$ também é linearmente independente com relação aos vetores p_s (com $s = 2, 3, ..., m$).

Suponha que $\mathbf{p}_1 = \alpha_2\mathbf{p}_2 + \alpha_2\mathbf{p}_3 + ... + \alpha_m\mathbf{p}_m$, ou seja, suponha que $\mathbf{p}_1$ pode ser escrito com combinação linear dos outros vetores e vamos chegar a uma contradição.

Utilizando a primeira equação do sistema (2.8) e escrevendo $\mathbf{p}_1$ como combinação linear dos outros vetores temos:

$$(C - {\lambda_1}^2 I)^T(\sum_{j=2}^{m} \alpha_j {\mathbf{p}_j}^T) = 2i\lambda_1 {\mathbf{p}_2}^T,$$

e assim,

$$(\alpha_2 C^{*T} - 2i\lambda_1 I){\mathbf{p}_2}^T = -C^{*T}(\sum_{j=3}^{m} \alpha_j {\mathbf{p}_j}^T).$$

Afirmação 2.1.1. *O determinante da matriz* $(\alpha_2 C^{*T} - 2i\lambda_1 I)$ *é diferente de zero.*

Demonstração: Supondo que $\det(\alpha_2 C^{*T} - 2i\lambda_1 I) = 0$, teremos:

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_2 C^{*T} - 2i\lambda_1 I) &= \det(\alpha_2 C^T - \alpha_2 {\lambda_1}^2 I - 2i\lambda_1 I) \\
&= \det(\alpha_2 C^T - (\alpha_2 {\lambda_1}^2 - 2i\lambda_1) I) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Com isso,
$$\frac{(\alpha_2{\lambda_1}^2 - 2i\lambda_1)}{\alpha_2}$$
é um autovalor real de C o que levaria a instabilidade do sistema, contradizendo o fato dele ser estável. Logo, $\det(\alpha_2 C^{*T} - 2i\lambda_1 I) = 0$. ∎

Assim, com o determinante da matriz $(\alpha_2 C^{*T} - 2i\lambda_1 I)$ diferente de zero, garantimos que essa matriz tem inversa e que o vetor ${\mathbf{p}_2}^T$ é escrito como combinação linear dos outros vetores $\mathbf{p}_3, ..., \mathbf{p}_m$ o que é uma contradição, pois esses vetores são linearmente independentes. Assim, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, ..., \mathbf{p}_m$ são vetores linearmente independentes e a matriz P é não-singular ($\det P \neq 0$).

Proposição 2.1.8. *A transformação inversa pode ser encontrada pelas equações*
$$\sum_{j=1}^{m} (p_{1j}\lambda_1 + i\mu p_{2j})\mathbf{u}_j = \frac{1}{2}(z_1 + \overline{z}_1), \quad \sum_{j=1}^{m} p_{1j}\dot{\mathbf{u}}_j = \frac{1}{2}(z_1 - \overline{z}_1)$$
$$\sum_{j=1}^{m} p_{sj}\mathbf{u}_j = \frac{1}{2}{\lambda_s}^{-1}(z_s + \overline{z}_s), \quad \sum_{j=1}^{m} p_{sj}\dot{\mathbf{u}}_j = \frac{1}{2}(z_s - \overline{z}_s) \quad (s = 2, , 3, ..., m)$$
Daí, concluímos que $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v} = A^{-1}\dot{\mathbf{u}}$ *são combinações lineares de expressões real e imaginária* $z + \overline{z}$ *e* $z - \overline{z}$*, respectivamente.*

Demonstração: Abrindo alguns cálculos teremos:
$$\begin{aligned}
z_1 + \overline{z_1} &= \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_1\mathbf{u}_j) + i\mu\sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{m} -p_{1j}(\dot{\mathbf{u}}_j - \lambda_1 u_j) + i\mu\sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_1\mathbf{u}_j) + i\mu\sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(-\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_1\mathbf{u}_j) + i\mu\sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j \\
&= 2\cdot(\sum_{j=1}^{m} p_{1j}\lambda_1\mathbf{u}_j + +i\mu\sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j)
\end{aligned}$$
Como p_{ij} e λ_1 são imaginários puros, temos $\overline{p_{ij}} = -p_{ij}$ e $\overline{\lambda_1} = -\lambda_1$, $\overline{i} = -i$ enquanto os outros termos permanecem inalterados por pertencerem ao conjunto dos números reais. De maneira análoga, podemos calcular $z_1 - \overline{z_1}$.
$$\begin{aligned}
z_1 - \overline{z_1} &= \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_1\mathbf{u}_j) + i\mu\sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j - (\sum_{j=1}^{m} -p_{1j}(\dot{\mathbf{u}}_j - \lambda_1\mathbf{u}_j) + i\mu\sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_1\mathbf{u}_j) + i\mu\sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(\dot{\mathbf{u}}_j - \lambda_1\mathbf{u}_j) - i\mu\sum_{j=1}^{m} p_{2j}\mathbf{u}_j \\
&= 2\cdot(\sum_{j=1}^{m} p_{1j}\dot{\mathbf{u}}_j).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{m} (p_{1j}\lambda_1 + i\mu p_{2j})\mathbf{u}_j = \frac{1}{2}(z_1 + \overline{z_1})$$
$$\sum_{j=1}^{m} p_{1j}\dot{\mathbf{u}}_j = \frac{1}{2}(z_1 - \overline{z_1}).$$

Para $s = 2, 3, ..., m$ procedemos da mesma maneira,

$$\begin{aligned} z_s + \overline{z_s} &= \sum_{j=1}^{m} p_{sj}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_s \mathbf{u}_j) + \sum_{j=1}^{m} p_{sj}(-\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_s \mathbf{u}_j) \\ &= 2 \cdot (\sum_{j=1}^{m} p_{sj}\lambda_s \mathbf{u}_j). \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} z_s - \overline{z}_s &= \sum_{j=1}^{m} p_{sj}(\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_s \mathbf{u}_j) - (\sum_{j=1}^{m} p_{sj}(-\dot{\mathbf{u}}_j + \lambda_s \mathbf{u}_j)) \\ &= 2 \cdot (\sum_{j=1}^{m} p_{sj}\dot{\mathbf{u}}_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} p_{sj}\mathbf{u}_j = \frac{1}{2}{\lambda_s}^{-1}(z_s + \overline{z}_s)$$
$$\sum_{j=1}^{m} p_{sj}\dot{\mathbf{u}}_j = \frac{1}{2}(z_s - \overline{z_s}),$$

mostrando então que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} = A^{-1}\dot{\mathbf{u}}$ são combinações lineares de expressões real e imaginária $z + \overline{z}$ e $z - \overline{z}$, respectivamente. ∎

2.2 Forma normal até termos de terceira ordem

Assumindo que o sistema linearizado está na forma normal, vamos obter a forma normal dos termos não lineares até terceira ordem. Usaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. *(Poincaré-Dulac) Um sistema de equações diferenciais*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + f_2(\mathbf{x}) + h.o.t. \tag{2.12}$$

pode ser formalmente reduzido a

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \sum_{k=2}^{\infty} g_k(\mathbf{y}) \tag{2.13}$$

onde g_k é homogêneo de grau k e formado somente por termos ressonantes, com $Dg_k(\mathbf{y})A\mathbf{y} - Ag_k(\mathbf{y}) = 0$, para todo $k \geq 2$. O sistema (2.13) é dito ser uma forma normal para o sistema (2.12).

Note que os termos ressonantes na expansão em série de Taylor de f só dependem da parte linear de f. A expressão ressonante é devido a presença de ressonâncias entre os autovalores de $Df(0)$. Para ver isto, assuma que A é uma matriz diagonal real com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. O caso complexo é análogo. Seja $H^{m,n}$ o espaço dos monômios m-homogêneos em $\mathbb{R}^n$, $x^m \frac{\partial}{\partial x_s}$ e $L_A^{(m)} : H^{m,n} \rightarrow H^{m,n}$ definido por $L_A^{(m)}(h_m)(x) = Ah^m(x) - Dh_m(x)Ax$, onde $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$.

Os autovalores de $L_A^{(m)}$ são os monômios $x^m \frac{\partial}{\partial x_s}$, satisfazendo

$$L_A^{(m)}\left(x_m \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = [(m, \lambda) - \lambda_s] x_m \frac{\partial}{\partial x_s}$$

onde $(m, \lambda) = \sum_j m_j \lambda_j$.

Portanto, se a relação $(m, \lambda) - \lambda_s = 0$ é satisfeita para certos s e m, então o monômio $x_m \frac{\partial}{\partial x_s}$ é ressonante (ou seja, tal monômio está no núcleo do operador $L_A^{(m)}$).

Considere o sistema (1.7) com $l = m = 2$ e ${\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^2$. Assumindo que uma mudança linear de coordenadas foi aplicada de tal maneira que o sistema linearizado está na forma explicitada pela Proposição 2.1.7, obtendo a forma normal de Poincaré-Dulac até termos de terceira ordem e fazendo a mudança de variáveis

$$\rho_1 = z_1\overline{z_1}, \quad \rho_2 = z_2\overline{z_2}, \quad x = i(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}), \quad x_1 = i(\overline{z_1}\ \overline{z_2} - z_1 z_2)$$

o sistema assume a forma:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho_1} &= x[\mu + (B_{11} - C_{12})\rho_1 + B_{12}\rho_2 + C_{11}y] + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
\dot{\rho_2} &= -x[A_{21}\rho_1 + (A_{22} - C_{21})\rho_2 + C_{22}y] + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
\dot{x} &= R(\rho_1, \rho_2, y) + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
\dot{x_1} &= R_1(z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}) + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
R &= 2[\mu\rho_2 - A_{21}{\rho_1}^2 + (B_{11} - A_{22} - C_{12} + C_{21})\rho_1\rho_2 + B_{12}{\rho_2}^2] \\
&\quad +y[(A_{11} - B_{21} - C_{22})\rho_1 + (A_{12} - B_{22} + C_{11})\rho_2] + (C_{12} - C_{21})y^2 \\
y &= \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}, \quad x^2 + y^2 = 4\rho_1\rho_2
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde R_1 é um polinômio de grau 4, $A_{ij},\ B_{ij},\ C_{ij}$ são coeficientes reais.

Capítulo 3

Estabilidade de sistemas reversíveis com ressonância de segunda ordem

A partir de agora vamos estudar a estabilidade da solução nula do sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho_1} &= x[1 + (B_{11} - C_{12})\rho_1 + B_{12}\rho_2 + C_{11}y] + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
\dot{\rho_2} &= -x[A_{21}\rho_1 + (A_{22} - C_{21})\rho_2 + C_{22}y] + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
\dot{x} &= R(\rho_1, \rho_2, y) + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
\dot{x_1} &= R_1(z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}) + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
R &= 2[\rho_2 - A_{21}{\rho_1}^2 + (B_{11} - A_{22} - C_{12} + C_{21})\rho_1\rho_2 + B_{12}{\rho_2}^2] \\
&\quad + y[(A_{11} - B_{21} - C_{22})\rho_1 + (A_{12} - B_{22} + C_{11})\rho_2] + (C_{12} - C_{21})y^2 \\
y &= \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}, \quad x^2 + y^2 = 4\rho_1\rho_2
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

obtido no capítulo anterior por meio da normalização até termos de terceira ordem de um sistema reversível que apresenta ressonância de segunda ordem no caso em que $l = m = 2$. Forneceremos condições necessárias e suficientes para a estabilidade da solução nula dependendo de C ser ou não diagonalizável.

3.1 Estabilidade no caso em que a matriz C é não-diagonalizável

Nesta seção consideraremos $\mu = 1$ em (3.1), visto que estudaremos a estabilidade da solução nula de (3.1) quando C é não-diagonalizável.

Teorema 3.1.1. *No caso $\mu = 1$, a solução nula do sistema (3.1) é instável no sentido de Lyapunov se a função $R(\rho_1, \rho_2, y)$ tem sinal definido numa vizinhança da origem inteiramente situada dentro do cone $\rho_1 \geq 0$ e $\rho_2 \geq 0$.*

Demonstração: Considere as seguintes regiões:

$$C_1 = \{(\rho_1, \rho_2, y); \rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0 \text{ e R tem sinal positivo}\}$$

$$\Omega = \{(\rho_1, \rho_2, y); x > 0\} \cap C_1 \subset C_1.$$

A função $V = x$ é a função de Chetaev na região Ω. De fato, temos que $V = x > 0$ em Ω e que sua derivada ao longo das soluções de (3.1), que é dada por $\dot{V} = \dot{x} = R$, também é definida positiva em Ω. Além disso, para $x_0 \in \partial\Omega$ temos que $V(x_0) = 0$. Pelo Teorema 1.3.2 segue que a solução nula de (3.1) é instável. ∎

Observação 3.1.2. *Para l e m arbitrários é possível demonstrar que a função*

$$V = x^2 - \gamma^2 \sum_{j=1}^{l-m} \xi^2 - \sum_{s=3}^{m} z_s \overline{z_s},$$

onde γ é uma constante escolhida adequadamente, é uma função de Chetaev para as equações correspondentes. A instabilidade também deriva do fato de R ter sinal definido. Observe que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x\dot{x} - \gamma^2 \sum_{j=1}^{l-m} 2\xi\dot{\xi} - \sum_{s=3}^{m} (\dot{z}_s \overline{z}_s + z_s \dot{\overline{z}}_s) \\ &= 2x\dot{x} - \sum_{s=3}^{m} (\lambda_s z_s \overline{z}_s - \lambda_s z_s \overline{z}_s) \\ &= 2x\dot{x} \end{aligned}$$

Pois $\dot{\xi} = 0$, $\dot{z}_s = \lambda_s z_s$ e $\dot{\overline{z}}_s = -\lambda_s \overline{z}_s$.

Para $\mu = 1$, segue das seguintes desigualdades:

$$|\rho_1 y| \leq 2{\rho_1}^{\frac{3}{2}} {\rho_2}^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_2 + |A_{21}|{\rho_1}^2 \geq 2(|A_{21}|\rho_2)^{\frac{1}{2}} \rho_1$$

que $A_{21} < 0$ é uma condição suficiente para a instabilidade.

Corolário 3.1.3. *No caso $\mu = 1$, se $A_{21} < 0$ temos que a solução nula de (3.1) é instável no sentido de Lyapunov.*

Vamos agora obter uma condição necessária para estabilidade da solução nula do truncamento, em terceira ordem, do sistema (3.1), provando o seguinte teorema:

Teorema 3.1.4. *Suponha que $l = m = 2$, $\mu = 1$ e que $A_{21} \neq 0$. Se $A_{21} > 0$ então a solução nula do sistema obtido pelo truncamento, em terceira ordem, do sistema (3.1) é estável no sentido de Lyapunov.*

Demonstração: O truncamento em terceira ordem do sistema (3.1) é reversível com relação a involução $M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por $M(x, y, \rho_1, \rho_2) = (-x, y, \rho_1, \rho_2)$. Assim, o conjunto de pontos fixados pela involução M é $S = \{(x, y, \rho_1, \rho_2); x = 0\}$ e o retrato de fase do sistema é simétrico com relação a S. Pela Proposição 1.4.8 vimos que se uma trajetória interceptar o conjunto de pontos fixos S em dois pontos distintos sua órbita é fechada. Com base nessa informação, dividiremos a prova em dois casos:

Primeiro caso: Considere o comportamento de uma trajetória ao longo da qual x se anula no máximo uma vez, ou seja, a trajetória intercepta o conjunto de pontos fixos no máximo uma vez. Suponha que no tempo t_0 os valores de ρ_1, ρ_2 satisfazem a condição $\rho_1(t_0) + \rho_2(t_0) \leq \delta^2$, onde δ é um pequeno número positivo e que para $t > t_0$, x preserva os sinais enquanto ρ_1, ρ_2 permanecem na σ-vizinhança, ou seja, $\rho_1 + \rho_2 < \sigma$ ($\sigma > \delta > \delta^2$). Note que, pela simetria do retrato de fase, o caso $t < t_0$ reduz-se ao estudo do caso $t > t_0$.
Se $x \neq 0$, concluímos das duas primeiras equações do sistema truncado de (3.1) e utilizando o Teorema do valor médio que:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \rho_1} = f(\rho_1, \rho_2, y), \ |f(\rho_1, \rho_2, y)| \leq k(\rho_1 + \rho_2) \ \ (k = const.)$$

onde

$$f(\rho_1, \rho_2, y) = -\frac{A_{21}\rho_1 + (A_{22} - C_{21})\rho_2 + C_{22}y}{1 + (B_{11} - C_{12})\rho_1 + B_{12}\rho_2 + C_{11}y}.$$

Então, no domínio $\rho_1 + \rho_2 \leq \delta$, os incrementos das variáveis ρ_1 e ρ_2 satisfazem a inequação $|\Delta\rho_2| \leq k\delta|\Delta\rho_1|$. Na fronteira $\rho_1 + \rho_2 = \delta$, temos:

$$|\Delta\rho_2| \leq k\delta^2, \ \ \rho_2 \leq \rho_2(t_0) + |\Delta\rho_2| \leq (1 + k)\delta^2, \ \rho_1 = \delta - \rho_2 \geq \delta - (1 + k)\delta^2.$$

Daí segue que se $x < 0$, a trajetória não atingue a δ-vizinhança. Isso decorre do fato de

$$\dot{\rho}_1 = -x[A_{21}\rho_1 + (A_{22} - C_{21})\rho_2 + C_{22}y] < 0,$$

o que mostra que a função ρ_1 é decrescente não atinguindo assim a δ-vizinhança.

Se $x > 0$, então as quantidades ${\rho_1}^2$ e ρ_2 são de mesma ordem na fronteira da vizinhança (se for atinguida), independente da escolha dos dados iniciais. Já que $\dot{\rho_1} > 0$, $\dot{\rho_2} < 0$, obtemos:

$$ {\rho_1}^2 \geq [1 - (1+k)\delta]^2 (1+k)^{-1} \rho_2. $$

Ao mesmo tempo,

$$ \frac{d\rho_2}{d\rho_1} = -A_{21}\rho_1 + f^*(\rho_1, \rho_2, y), \ |f^*| \leq k^* {\rho_1}^{\frac{3}{2}} \ (k^* = const. > 0). $$

Suponha que ρ_1 aumente junto com $\epsilon_1 \geq \delta - (1+k)\delta^2$ até $\epsilon = \alpha\epsilon_1$ com $\alpha = const. > 1$. Então, $\Delta\rho_1 = \epsilon - \epsilon_1 = (\alpha - 1)\epsilon_1$, $\Delta{\rho_1}^2 = (\alpha^2 - 1){\epsilon_1}^2$ e $\Delta\rho_2 \leq -\frac{1}{2}A_{21}(\alpha^2 - 1)\epsilon_1^2 + k^*(\alpha^{\frac{5}{2}} - 1){\epsilon_1}^{\frac{5}{2}}$. Consequentemente,

$$ \rho_2 \leq (1+k)\delta^2 + \Delta\rho_2 < \frac{1}{2}[(1+k) - A_{21}(\alpha^2 - 1)]{\epsilon_1}^2 + k^*(\alpha^{\frac{5}{2}} - 1){\epsilon_1}^{\frac{5}{2}} $$

Se $\alpha^2 > 2(1+k)A_{21}^{-1} + 1$, então para ϵ_1 suficientemente pequeno temos $\rho_2 < 0$, o que é impossível. Então, nenhuma das trajetórias em consideração podem atingir a fronteira de ϵ-vizinhança se as condições iniciais permanecem na δ^2-vizinhança (δ é a raiz mínima da equação $\dfrac{\epsilon}{\alpha} = \delta - (1+k)\delta^2$).

Segundo caso: Considere agora trajetórias em que x se anula pelo menos duas vezes, ou seja, trajetórias que interceptam o conjunto de pontos fixos em pelo menos dois pontos. Pela Proposição 1.4.8, as trajetórias são curvas fechadas. A família dessas soluções periódicas $\{\eta(t) = (x(t), \rho_1(t), \rho_2(t))\}$ não leva a instabilidade. Com efeito, vamos supor que leva a instabilidade para chegar em uma contradição.

Suponha que para algum $\epsilon > 0$ a família intersecta a esfera S_ϵ na sequência de pontos $\{\eta_{0k}^{'}\}$. Seja $\{\eta_{0k}\}$ uma subsequência convergente, visto que a esfera S_ϵ é compacta, e $\{t_k\}$ a sequência de tempo correspondente, que satisfaz a condição:

$$ \{t_k\} \to -\infty, \quad \eta(\eta_{0k}, t_k) = \min_{-T_k < t < 0} \parallel \eta(\eta_{0k}, t) \parallel \to 0, \ \text{com } k \to \infty. $$

[T_k é o período de $\eta(\eta_{0k}, t)$]. Seja $\eta_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \eta_{0k}$. Obviamente, $\lim\limits_{k\to\infty} \eta(\eta_0, t_k) = 0$. Isto significa que $\eta(\eta_{0k}, t)$ leva a instabilidade.

A função x se anula ao longo de $\eta(\eta_0, t)$ no máximo uma vez, caso contrário $\eta(\eta_0, t)$ seria uma função periódica do tempo e então a trajetória atingiria $\eta = 0$ num tempo finito, o que é impossível.

Este resultado implica em uma contradição: por um lado, segue dos argumentos prévios que trajetória $\eta(\eta_0, t)$ não deve deixar a $\epsilon-$vizinhança; por outro lado, ela deve. Isso completa a prova da estabilidade.

$\blacksquare$

3.2 Estabilidade no caso em que a matriz C é diagonalizável

Nesta seção consideraremos $\mu = 0$, visto que fornecermos condições necessárias e suficientes para estabilidade do truncamento em terceira ordem do sistema (3.1) no caso em que a matriz C é diagonalizável. Assim, reescrevendo o sistema (2.14) fazendo $\mu = 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho_1} &= x[(B_{11} - C_{12})\rho_1 + B_{12}\rho_2 + C_{11}y] + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
\dot{\rho_2} &= -x[A_{21}\rho_1 + (A_{22} - C_{21})\rho_2 + C_{22}y] + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
\dot{x} &= R(\rho_1, \rho_2, y) + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
\dot{x_1} &= R_1(z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}) + O((\rho_1 + \rho_2)^{\frac{5}{2}}) \\
R &= 2[-A_{21}{\rho_1}^2 + (B_{11} - A_{22} - C_{12} + C_{21})\rho_1\rho_2 + B_{12}{\rho_2}^2] \\
&\quad + y[(A_{11} - B_{21} - C_{22})\rho_1 + (A_{12} - B_{22} + C_{11})\rho_2] + (C_{12} - C_{21})y^2 \\
y &= \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}, \quad x^2 + y^2 = 4\rho_1\rho_2
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

onde R_1 é um polinômio de grau 4, $A_{ij},\ B_{ij},\ C_{ij}$ são coeficientes reais.

Para escrever o sistema acima em função de ρ_1, ρ_2 e y, devemos calcular $\dot{y}$:

Como $x^2 + y^2 = 4\rho_1\rho_2$, derivando implicitamente, temos $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 4\dot{\rho_1}\rho_2 + 4\rho_1\dot{\rho_2}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= \frac{2\dot{\rho_1}\rho_2 + 2\rho_1\dot{\rho_2} - x\dot{x}}{y} \\
&= \frac{(B_{12} - A_{11} - C_{22})x\rho_1 + (B_{22} + C_{11} - A_{12})x\rho_2 + (C_{21} - C_{12})xy}{y}
\end{aligned}
$$

Então concluímos que a terceira aproximação do sistema truncado de (3.2) é

$$\dot{z} = xAz, \quad z = (\rho_1, \rho_2, y)^T, \quad x = \pm\sqrt{4\rho_1\rho_2 - y^2} \text{ e} \tag{3.3}$$
$$A = \begin{pmatrix} B_{11} - C_{12} & B_{12} & C_{11} \\ -A_{21} & C_{21} - A_{22} & -C_{22} \\ B_{12} - A_{11} - C_{22} & B_{22} + C_{11} - A_{12} & C_{21} - C_{12} \end{pmatrix}.$$

O restante desta seção é dedicado a fornecer uma demonstração do seguinte teorema:

Teorema 3.2.1. *Assuma que todos os autovalores da matriz A possuem parte real não nula. A solução nula de (3.3) é instável se, e somente se, existe um número positivo k tal que ambas as condições seguintes são satisfeitas:*

$$G_3k^3 + G_2k^2 + G_1k + G_0 = 0, \ |A_1| < 1 \tag{3.4}$$

sob a condição, $k_1 = 2A_1\sqrt{k}$ e considerando

$$\begin{aligned}
G_3 &= C_{11}^2(B_{22} - A_{12} + C_{11}) + B_{12}(B_{12}C_{22} + C_{11}C_{12} - C_{11}A_{22}) \\
G_2 &= C_{11}^2(B_{21} - A_{11} - C_{22}) + 2C_{11}C_{22}(B_{22} - A_{12} + C_{11}) + B_{12}(B_{11}C_{22} - \\
- & \quad C_{22}C_{21} - C_{11}A_{21}) + (B_{11} - C_{12} + A_{22} - C_{21})(B_{12}C_{22} + C_{12}C_{11} - C_{11}A_{22}) \\
G_1 &= 2C_{11}C_{22}(B_{21} - A_{11} - C_{22}) + C_{22}^2(B_{22} - A_{12} + C_{11}) + A_{21}(B_{12}C_{22} + \\
+ & \quad C_{11}C_{12} - C_{11}A_{22}) + (B_{11} - C_{12} + A_{22} - C_{21})(B_{11}C_{22} - C_{22}C_{21} - C_{11}A_{21}) \\
G_0 &= C_{22}^2(B_{21} - A_{11} - C_{22}) + A_{21}(B_{11}C_{22} - C_{22}C_{21} - C_{11}A_{21}) \\
A_1 &= -[k(B_{11} + A_{22} - C_{12} - C_{21}) + k^2B_{12} + A_{21}][2\sqrt{k}(kC_{11} + C_{22})]^{-1}.
\end{aligned}$$

No caso em que a solução nula do sistema truncado (3.3) é instável temos que a solução nula do sistema completo (3.2) é instável.

Definição 3.2.2. *Uma solução ρ_1, ρ_2, y é dita ser um raio invariante se satisfaz as seguintes condições:*

$$\rho_2 = k_2\rho_1, \quad y = k_1\rho_1, \quad {k_1}^2 < 4k_2 \tag{3.5}$$

onde $k_1, k_2 > 0$ são parâmetros constantes.

Observe que substituindo os valores da definição de raios invariantes na desigualdade $y^2 \leq 4\rho_1\rho_2$ e considerando-os fora da fronteira, temos:

$$k_1^2{\rho_1}^2 < 4\rho_1(k_2\rho_1) \Rightarrow k_1^2 < 4k_2$$

Agora iremos obter condições necessárias e suficientes para a existência de *raios invariantes*. Em seguida, mostraremos que soluções do tipo raios invariantes levam a instabilidade do sistema.

Lema 3.2.3. *As equações (3.3) admitem uma solução particular da forma (3.5) se, e somente se, existe um número positivo k tal que ambas as condições dadas em (3.4) são válidas.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Considere que $(\rho_1, \rho_2, y) = (\rho_1, k_2\rho_1, k_1\rho_1)$ é uma solução do sistema (3.3). Assim, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \dot{\rho_1} &= [(B_{11} - C_{12}) + k_2 B_{12} + k_1 C_{11}]\rho_1 \\ k_2\dot{\rho_1} &= [-A_{21} + k_2(C_{21} - A_{22}) - k_1 C_{22}]\rho_1 \\ k_1\dot{\rho_1} &= [(B_{21} - A_{11} - C_{22}) + k_2(B_{22} + C_{11} - A_{12}) + k_1(C_{21} - C_{12})]\rho_1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.6) por k_2 e igualando a segunda equação de (3.6), concluímos que:

$$\begin{aligned} k_2 \quad & (B_{11} - C_{12}) + {k_2}^2 B_{12} + k_2 k_1 C_{11} = -A_{21} + k_2(C_{21} - A_{22}) - k_1 C_{22} \\ k_1 \quad & (k_2 C_{11} + C_{22}) = -[k_2(B_{11} + A_{22} - C_{12} - C_{21}) + {k_2}^2 B_{12} + A_{21}] \\ k_1 \quad & = -\frac{k_2(B_{11} + A_{22} - C_{12} - C_{21}) + {k_2}^2 B_{12} + A_{21}}{k_2 C_{11} + C_{22}}, \end{aligned}$$

fazendo $k_2 = k$, obtemos $k_1 = 2A_1\sqrt{k}$.

Alguns cálculos mostram que $G_3k^3 + G_2k^2 + G_1k + G_0 = 0,\ |A_1| < 1$. Basta multiplicar a primeira equação de (3.6) por k_1, igualar a terceira equação de (3.6) e substituir k_1 por:

$$k_1 = -\frac{k(B_{11} + A_{22} - C_{12} - C_{21}) + k^2 B_{12} + A_{21}}{kC_{11} + C_{22}},$$

desta forma, obtemos a igualdade: $G_3k^3 + G_2k^2 + G_1k + G_0 = 0$.

($\Leftarrow$) Basta considerar $k = k_2$ e $G_3k^3 + G_2k^2 + G_1k + G_0 = 0,\ |A_1| < 1$. Assim, obtemos as equações descritas em (3.6) o que mostra que uma solução do tipo raio invariante descrito em (3.5) é uma solução do sistema (3.3).

∎

Agora, para concluir a prova do Teorema 3.2.1, vamos provar o seguinte lema.

Lema 3.2.4. *Assuma que todos os autovalores da matriz A possuem parte real não nula. O sistema truncado (3.3) é instável se, e somente se, o sistema (3.3) admite uma solução particular da forma (3.5). A existência de tal solução garante também a instabilidade do sistema (3.2).*

Demonstração: Como $\rho_1 = z_1\overline{z_1}$ e $\rho_2 = z_2\overline{z_2}$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ e $\rho_1, \rho_2 \geq 0$. Também sabemos que $x = i(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) \in \mathbb{R}$, assim $x^2+y^2 = 4\rho_1\rho_2$ implica que $y^2 \leq 4\rho_1\rho_2$. Visto que $z_j = a_j + ib_j$ com $j = 1, 2$, ou seja $z_j \in \mathbb{C}$. Assim, o cone

$$K = \{\rho_1, \rho_2, y : 4\rho_1\rho_2 \geq y^2, \quad \rho_1 \geq 0, \ \rho_2 \geq 0\} \tag{3.7}$$

é um conjunto invariante de soluções do sistema (3.3).

No hiperbolóide $y^2 = 4\rho_1\rho_2$, a função x é nula e então o retrato de fase do sistema (3.3) é simétrico com respeito a fronteira de K uma vez que o conjunto fixado pela involução M é $S = \{(x, y, \rho_1, \rho_2); x = 0\}$.

Por meio de uma reparametrização do tempo, o sistema (3.3) pode ser reescrito como o seguinte sistema:

$$\dot{z}_* = Az_*. \tag{3.8}$$

Se o ponto é refletido duas vezes temos um movimento periódico de alguma parte do retrato de fase de (3.8) que pertence a K.

Desde que todos os autovalores de A tem parte real não nula, a equação característica de A não tem raízes com parte real idêntica (excluindo o caso de autovalores complexos conjugados). Sendo assim, existem 10 possibilidades de posições relativas dos autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$:

$$\begin{array}{ll} 1. & \lambda_j \in \mathbb{R};\ \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 \\ 2. & \lambda_j \in \mathbb{R};\ \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \ e\ \lambda_3 > 0 \\ 3. & \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \text{ e } \mathrm{Re}\lambda_1 < \lambda_3 < 0 \\ 4. & \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \text{ e } \lambda_3 < \mathrm{Re}\lambda_1 < 0 \\ 5. & \lambda_1 = \overline{\lambda_2},\ \mathrm{Re}\lambda_1 < 0 \ e\ \lambda_3 > 0 \end{array} \tag{3.9}$$

Os outros cinco casos são obtidos de (3.9) pela substituição de λ_j por $-\lambda_j$. O fato do sistema (3.3) não ter raios invariantes quer dizer que nem os autovetores reais ξ_k de A e nem os vetores reversos $-\xi_k$ permanecem no cone K. Examinando a forma da solução geral da equação (3.8),

$$z_*(t) = \sum_{k=1}^{3} C_k e^{\lambda_k t}\xi_k, \tag{3.10}$$

vimos que K não contém semi-trajetórias positivas (negativas) da equação (3.8), já que a trajetória permanece em K quando $t \to +\infty$ e quando $t \to -\infty$. Assim, se K não contém raios invariantes, as soluções que se encontram em K são funções periódicas do tempo e, então, o sistema truncado (3.3) é estável. Com isso, concluímos que a instabilidade da solução nula garante a existência de raios invariantes em K.

A existência de raios invariantes da forma (3.5) garante a instabilidade do sistema truncado (3.3) e do sistema completo (3.2).

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] ARNOLD, V. I. *Geometrical Methods in the theory of ordinary Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 2ed. 1988.

[2] HOFFMAN, K., KUNZE, R. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1979.

[3] KRISIL'NIKOV, P. S., TKHAI, V. N. Reversible Systems. Stability at 1:1 Resonance. *J. Appl. Math. Mechs.*, v.56, p.475-484, 1992.

[4] MARTINS, R. M. Formal equivalence between normal forms of reversible and hamiltonian dynamical systems. *Communications on Pure and Applied Analysis*, v. 13, p. 703-713, 2014.

[5] MARTINS, R. M. *Equações Diferenciais: Reversibilidade e Bifurcações*, Tese (Doutorado em Matemática), IMECC/UNICAMP, 2011.

[6] SILVA, G. F. *Formas normais de sistemas dinânicos reversíveis*, Dissertação (Mestrado em Matemática), IMECC/UNICAMP, 2002.

[7] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides).

[8] TEIXEIRA, M. A., YANG, J. Equações diferenciais reversíveis. *Matemática Universitária*, n.24/25, p.33-4t, 1998.

[9] VIDAL, C. *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*. Recife, 2004. (Notas de curso).